马尔科夫链基本原理与应用

探索离散时间随机过程的核心理论与实际应用

一、马尔科夫链的基本原理

什么是马尔科夫链?

马尔科夫链(Markov Chain)是一种**离散时间随机过程**,其核心特征是**无记忆性(Markov Property)**:未来状态只依赖当前状态,而与过去无关。

1.1 定义

马尔科夫性质

未来状态只依赖当前状态,而与过去无关。

其中 X_t 表示时刻 t 的状态。

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1}, \ldots, X_0) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

1.2 转移概率矩阵

转移规律由矩阵表示:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

转移概率

$p_{ij} = P(X_{t+1}=j \mid X_t=i)$

行和为1

$\sum_j p_{ij}=1$

1.3 状态分布演化

若时刻 t 的状态分布为 *\pi^{(t)}*,则:

$$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)} P, \quad \pi^{(t+k)} = \pi^{(t)} P^k$$

通过矩阵乘法,我们可以预测系统在任意未来时刻的状态分布。

二、稳态分布

系统长期稳定的概率分布

2.1 基本定义

若存在分布 |pi 满足:

$$\pi = \pi P, \quad \sum_i \pi_i = 1$$

则称为**平稳分布(Stationary Distribution)**,反映系统长期稳定概率。

( )

找到特征向量

求解方程 *|pi = |pi P*

([

归一化条件

确保 *|sum_i |pi_i = 1*

({

验证稳定性

检验分布是否保持不变

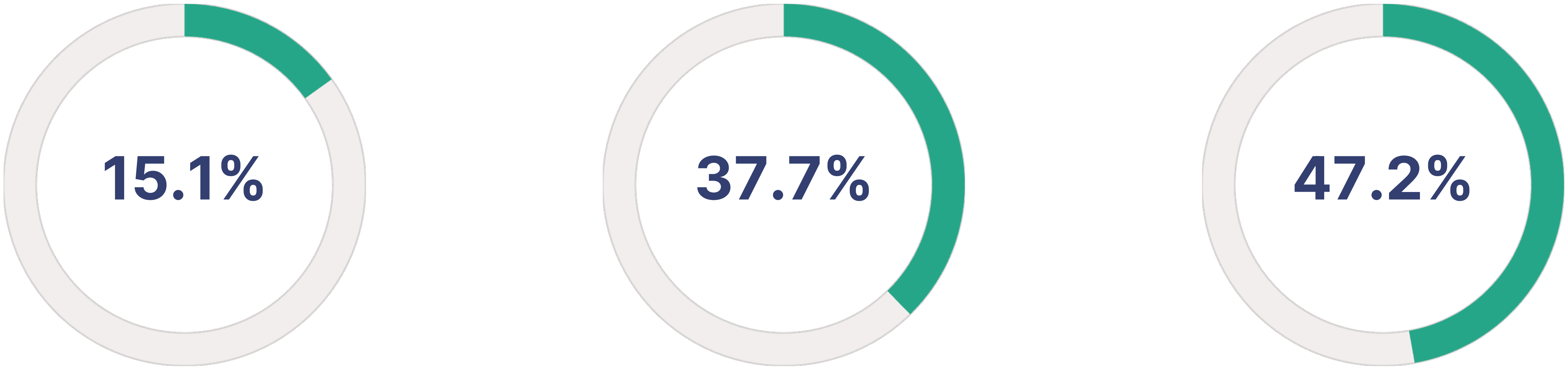
2.2 案例:三状态稳态分布

设三状态马尔科夫链:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

稳态分布 *|pi=[|pi_1, |pi_2, |pi_3]* 满足 *|pi=|pi P*。解得:

$$\pi \approx [0.151, 0.377, 0.472]$$



状态1 **状态2** **状态3**

即长期来看:状态1占15.1%,状态2占37.7%,状态3占47.2%。

三、吸收马尔科夫链

一旦进入就无法离开的状态

吸收状态

若某状态 i 一旦进入就不会离开

数学定义

$p_{ii}=1, \quad p_{ij}=0\ (j \neq i)$

实际案例

如赌博破产问题中的财富为0

3.2 吸收链定义与标准形式

若一个马尔科夫链**至少有一个吸收状态**,并且从任一非吸收状态出发最终必然进入某个吸收状态,则称为**吸收马尔科夫链。**

标准形式

通过调整状态顺序,转移矩阵写作:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Q矩阵

非吸收状态之间的转移

R矩阵

非吸收到吸收的转移

I矩阵

吸收状态保持不变

3.4 基本矩阵与吸收概率

基本矩阵

$$N = (I - Q)^{-1}$$

其元素 *N_{ij}* 表示在被吸收前,从状态 *i* 出发访问状态 *j* 的期望次数。

吸收概率矩阵

$$B = NR$$

其中 *B_{ij}* 是从状态 *i* 出发最终被吸收到第 *j* 个吸收状态的概率。

期望吸收时间

$$t_i = \sum_j N_{ij}$$

从状态 *i* 出发到被吸收的期望步数。

3.5 案例:赌徒输赢问题

设赌徒初始资金为2元,目标4元(赢),若降至0元则破产。状态为 $\{0,1,2,3,4\}$,其中0和4为吸收状态。

转移矩阵标准形式:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关键结果

- **非吸收部分:** Q 对应状态 $\{1,2,3\}$,R 对应吸收到 $\{0,4\}$
- **基本矩阵:** $N = (I-Q)^{-1}$
- **吸收概率:** $B = N R$

最终结论

从资金2出发,最终赢的概率=0.5;破产概率=0.5。

期望游戏时长(公平游戏)符合公式:

$$E[T \mid X_0 = i] = i(N - i), \quad N = 4$$

即起点2元时,期望4步被吸收。